

DOI: 10.7652/xjtuxb201709011

小位移旋量和响应面法相结合的 齿轮公差分析模型构建方法

黄康, 徐锐, 陈奇

(合肥工业大学机械工程学院, 230009, 合肥)

摘要: 为了更高效更合理地开展齿轮公差分析及优化,提出一种小位移旋量与响应面法相结合的齿轮公差分析模型构建方法。以齿轮安装公差为例,依据齿轮精度标准,利用小位移旋量公差建模理论建立了齿轮安装公差数学模型;基于该公差模型,结合齿面接触分析原理编制了计及误差的齿面接触分析模拟程序,并分析了不同变动要素对传动误差的影响;利用拉丁超立方试验方法采样并结合最小二乘法,构建了齿轮公差变动要素与传动误差之间的二阶响应面近似模型,从而得到了齿轮公差分析模型。实例分析结果表明:该方法建模精度较高,实用性好,可为齿轮公差分析和综合等提供参考。

关键词: 齿轮;公差分析;公差建模;小位移旋量;响应面法

中图分类号: TH115 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2017)09-0077-08

Gear Tolerance Modeling with Small Displacement Torsor and Response Surface Method

HUANG Kang, XU Rui, CHEN Qi

(School of Mechanical Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: To conduct tolerance analysis of gears more effectively and reasonably, a new tolerance analysis modeling approach for gears based on small displacement torsor (SDT) and response surface method is proposed. Taking the installation tolerance of a gear for example, the mathematical model for installation tolerance of the gear is built based on SDT theory and in accordance with gear precision standard. Based on this model and tooth contact analysis (TCA), a simulation program considering the errors is coded and the effects of different variation factors on transmission error are analyzed. A second-order response surface approximate model of gear transmission error is built based on Latin hypercube sampling and the least squares method, hence the tolerance analysis model of gears is obtained. An example is analyzed and the result indicates that the proposed method has high modeling accuracy and good practicability, and may provide a reference for gear tolerance analysis and synthesis.

Keywords: gear; tolerance analysis; tolerance modeling; small displacement torsor; response surface method

收稿日期: 2017-02-24。 作者简介: 黄康(1968—),男,教授,博士生导师;徐锐(通信作者),男,博士生。 基金项目: 国家国际科技合作专项资助项目(2014DFA80440);国家自然科学基金资助项目(51305116);安徽省自然科学基金资助项目(1408085MKL12)。

网络出版时间: 2017-06-21

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20170621.1624.002.html>

公差几乎贯穿于产品设计制造的各个环节,不仅关系到制造和装配过程,还极大地影响着产品的质量、功能、生产效率以及制造成本^[1]。科学技术的发展对产品的性能和制造成本提出了更高的要求,而作为降低生产成本和提高产品质量的重要工具,公差分析的作用变得日益显著。公差分析的成功与否直接依赖于所建立的装配公差分析模型。在建立了多个零件装配的公差数学模型后,可以采用极值法、统计法或蒙特卡罗法等方法进行公差分析^[2]。目前,国内外学者在公差分析模型构造理论与方法方面已进行了大量的研究,并取得了一定的进展。例如:Requicha 研究了一维尺寸公差的分析与计算,并提出了应用于一维公差分析的尺寸树模型^[3];Desrochers 等对漂移公差带模型进行了扩展,提出了工艺拓扑关联表面(TTRS)的公差信息表示模型^[4];Bourdet 等基于刚体假设和小位移假设,在公差领域中引入了小位移旋量理论^[5],随后一些学者进行了相关研究^[6-7];Davidson 等提出了一个与 ASME 标准兼容的公差图模型 T-Map^[8-9];吴玉光提出了基于真实机器模型的装配积累误差建模与分析方法,并分析了装配基准体系的几何误差在装配链中的传递和变换特征^[10]。

上述研究涉及到很多公差建模方法,依据这些方法即能构建用于装配体公差分析的数学模型。但是,这些构建的公差分析模型主要面向的是零件的装配性能,而对于齿轮机构而言,人们更为关注的是公差对其传动性能的影响。为了建立齿轮公差分析模型,必须建立齿轮公差与传动性能之间的关系。从目前的研究现状来看,与齿轮公差分析模型相关的研究相对较少。文献[11]从小位移旋量理论出发建立了圆柱斜齿轮齿面的公差数学模型,但没有进一步研究齿轮公差分析模型和方法。文献[12]利用矢量建模理论建立了锥齿轮公差模型,并提出了相应的公差分析方法,但是仅仅分析了不同公差单独约束下误差的变动对传动性能的影响,没有对多种公差共同约束下变动要素之间的关系进行详细探讨,也没有深入研究变动要素与传动性能之间的具体函数关系。由于齿轮结构及其传动具有一定的复杂性,在对其进行公差分析的过程中涉及到复杂的齿面接触计算,因此公差分析及优化的效率远远低于对其他机构的效率。针对这一问题,本文从建立公差变动要素与传动性能之间的非线性关系出发,提出一种小位移旋量法与响应面法相结合的齿轮公差分析模型构建方法,可以有效提高齿轮公差分析

及优化的效率。

本文以齿轮安装公差为研究对象,在深入研究基于数学定义的公差建模方法的基础上,依据齿轮安装精度标准,通过分析不同公差变动要素之间的关系,建立了齿轮安装公差的数学模型,并在分析公差变动要素对齿轮传动误差的影响的基础上,利用响应面法建立了变动要素与传动性能指标的响应面模型,以解决齿轮公差分析模型实用性不强的问题,最后通过实例验证了方法的合理性和有效性。

1 基于小位移旋量的公差建模方法

小位移旋量是带有 6 个运动分量的刚体产生微小位移所构成的矢量,最早由 Bourdet 在 1996 年引入到公差领域,并形成了公差表示的小位移旋量方法^[5]。这种方法包括 2 个假设:①刚体假设,即零件的刚性足够大,其特征面的变形量非常小;②小变动假设,即零件的公差相对于名义尺寸是微小量^[13]。在这 2 个假设下,每一个要素的变动量都可以由 2 组矢量表示,即绕坐标轴转动的微小变动矢量 $\theta = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ 和沿坐标轴平动的微小变动矢量 $d = (d_x, d_y, d_z)$ 。

小位移旋量则为上述 2 组矢量的合成,可写成

$$\mathbf{D} = (\theta, d)^T = (\theta_x, \theta_y, \theta_z, d_x, d_y, d_z)^T \quad (1)$$

式中: $\theta_x, \theta_y, \theta_z, d_x, d_y$ 和 d_z 为小位移旋量的参数或公差变动要素。

在实际应用中,为了便于进行矩阵运算,经常将小位移旋量的各个分量写成齐次矩阵的形式^[5,13-14]

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y & d_x \\ \theta_z & 1 & -\theta_x & d_y \\ -\theta_y & \theta_x & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

由于大多数要素是规则的,所以实际的小位移旋量分量一般会少于 6 个,即小位移旋量中部分参数在某些情况下将取 0。小位移旋量中参数取 0 的情况如下:当几何要素在公差域中沿某个矢量方向运动(平动或转动)时,其运动轨迹不产生异于该几何要素形状的新扫描实体,则对应的矢量参数取 0^[15]。例如,对于图 1a 所示的直线要素,由于它与 x 轴平行,当其沿 x 轴转动或平动时空间方位特征不变,则其小位移旋量分量 θ_x 和 d_x 取 0。同理,对于图 1b 所示的平面要素,由于其法向量与 z 轴平行,当其沿 z 轴转动或沿 x, y 轴平动时空间方位特征不变,则其小位移旋量分量 θ_z, d_x 和 d_y 取 0。

利用小位移旋量进行分析的一般步骤是:首先

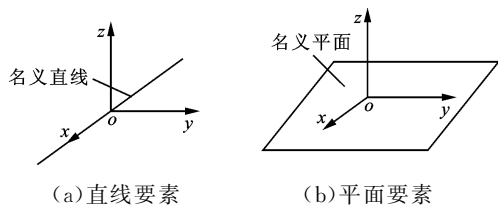


图1 几何要素图

分析研究对象的特征并写出其小位移旋量;其次从公差规范的语义出发,用小位移旋量变动方程和约束方程对公差进行建模,确定变动要素的变动区域;最后通过试验设计来生成各变动要素的变动量,进而分析变动要素对目标性能的影响。

2 齿轮安装公差模型的构建

误差对齿轮传动的影响主要体现在其传动性能上,若误差过大,会导致齿轮啮合时出现啮合不平稳、受力不均匀等现象,进而产生噪声,严重时甚至会造成断齿。因此,为了保证齿轮良好的传动性能,必须将其误差控制在合理的公差范围内。影响齿轮传动的误差主要包括齿轮自身的加工误差和因安装配合产生的误差。本节主要以安装时的中心距公差和平行度公差为例,依据公差设计规范,利用小位移旋量建立其公差模型。

2.1 基于小位移旋量的齿轮安装公差表示

按照精度标准 GB/Z 18620.3—2008,齿轮的中心距公差和平行度公差如图2所示^[16]。图中:轴线1和2分别为小、大齿轮的轴线,其中轴线2为基准轴线; l 和 L 分别为小、大齿轮的轴承间距; $f_{\Sigma y}$ 为轴线平面内的误差, $f_{\Sigma z}$ 为垂直平面内的误差。建立如图2所示的坐标系 $o-xyz$,其中原点 o 为轴线1的中心, x 轴与轴线1平行, y 轴位于轴线平面内, z 轴位于垂直平面内。由于研究对象为直线,小位移旋量的分量 θ_x 和 d_x 均为0,因此其小位移旋量可以写成如下形式

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y & 0 \\ \theta_z & 1 & 0 & d_y \\ -\theta_y & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

2.2 求解公差变动不等式与约束不等式

按照公差规范要求,轴线1由中心距公差和平行度公差共同约束:中心距尺寸公差对其沿 y 轴方向的变动有约束,使其变动区域为 $\left[-\frac{T_a}{2}, \frac{T_a}{2}\right]$;平行度公差对其沿 y 轴和 z 轴方向的变动均具有约束,

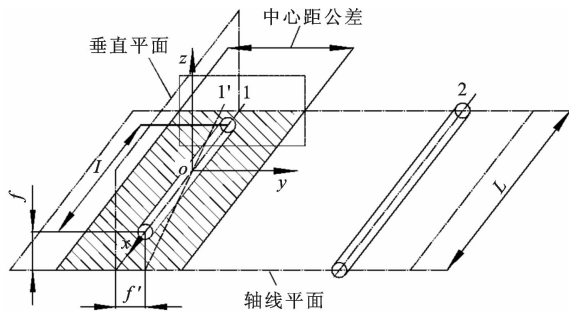


图2 中心距公差和轴线平行度公差

使其变动区域为平行于基准轴线且尺寸为 $T_y \times T_z$ 的四棱柱所限定的区域。变动不等式可以表示为

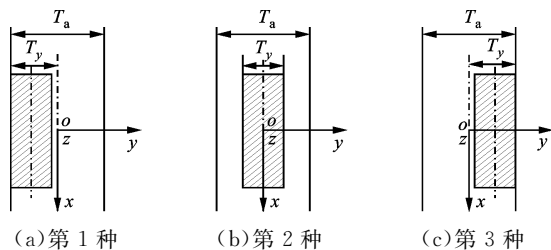
$$\left. \begin{aligned} -\frac{T_a}{2} &\leq d_y \leq \frac{T_a}{2}; & -\frac{T_z}{2} &\leq d_z \leq \frac{T_z}{2} \\ -\frac{T_z}{l} &\leq \theta_y \leq \frac{T_z}{l}; & -\frac{T_y}{l} &\leq \theta_z \leq \frac{T_y}{l} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

设作用的顺序为先平动 $d_y \rightarrow d_z$,后转动 $\theta_y \rightarrow \theta_z$,则此变动的含义是:轴线分别沿 y 和 z 轴移动 d_y 和 d_z 距离后到达某一位置,然后绕 y 和 z 轴分别旋转 θ_y 和 θ_z 角度,在这个过程中,轴线在规定长度内不能超过公差域的边界。

根据上述分析,轴线在 z 轴方向仅受中心距公差约束,则该方向的约束不等式为

$$-\frac{T_z}{2} \leq d_z + x\theta_z \leq \frac{T_z}{2} \quad (5)$$

轴线在 y 轴方向既存在中心距公差,又存在平行度公差,考虑两者的共同约束作用,其变动可以分为图3所示的3种情况。

图3 轴线在 y 轴方向变动的3种情况

(1) 当 $-\frac{T_a}{2} \leq d_y \leq \frac{T_y - T_a}{2}$ 时,公差域的上边界是平行度公差域的上边界,下边界是中心距公差域的下边界,如图3a所示,此时约束不等式为

$$d_y + x\theta_z \geq -\frac{T_a}{2}; \quad x\theta_z \leq \frac{T_y}{2}$$

即

$$-\frac{T_a}{2} - d_y \leq x\theta_z \leq \frac{T_y}{2} \quad (6)$$

(2) 当 $\frac{T_y - T_a}{2} < d_y < \frac{T_a - T_y}{2}$ 时,公差域的上、

下边界均是平行度公差域的上、下边界,如图 3b 所示,此时约束不等式为

$$x\theta_z \geq -\frac{T_y}{2}; \quad -x\theta_z \geq -\frac{T_y}{2}$$

即

$$-\frac{T_y}{2} \leq x\theta_z \leq \frac{T_y}{2} \quad (7)$$

(3) 当 $\frac{T_a - T_y}{2} \leq d_y \leq \frac{T_a}{2}$ 时,公差域的上边界是中心距尺寸公差域的上边界,下边界是平行度公差域的下边界,如图 3c 所示,此时约束不等式为

$$d_y + x\theta_z \leq \frac{T_a}{2}; \quad x\theta_z \geq -\frac{T_y}{2}$$

即

$$-\frac{T_y}{2} \leq x\theta_z \leq \frac{T_a}{2} - d_y \quad (8)$$

式(5)~式(8)构成了轴线在 y 轴方向上的约束不等式。对于轴线而言,由于变动的极限情况发生在轴线规定长度的两个端点处,因此各式中 x 均取为 $\pm l/2$ 。

从前面的分析可知,变动要素 d_z 和 θ_y 相关, d_y 和 θ_z 相关,因此通过建立坐标关系 $d_z-\theta_y$ 和 $d_y-\theta_z$,依据式(5)~式(8)即可绘出变动要素的变动区域,如图 4 所示。

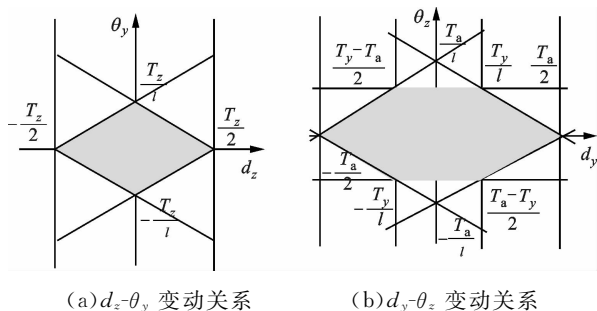


图 4 变动要素的变动区域

3 计及安装误差的齿轮传动接触分析

齿面接触分析的目的是获取啮合过程中齿面的接触椭圆位置、接触迹线以及传动误差^[17]。本节利用齿面接触分析来研究啮合过程中变动要素对传动误差的影响,为后面建立变动要素与传动误差之间的非线性关系奠定基础。

3.1 计及安装误差的齿面数学模型构建

已知主、从齿轮分别具有 $z^{(1)}$ 、 $z^{(2)}$ 个不同齿面,为了便于研究,进行如下标识:上角标 1、2 分别表示主、从齿轮;下角标 i 、 j 分别表示主、从齿轮的齿面,取值从 1 到 $z^{(1)}$ 或 $z^{(2)}$ 。

以齿轮 1 为例建立齿轮名义齿面数学模型。在图 5 所示的笛卡尔坐标系 $S_1^{(1)}(o_1-x_1y_1z_1)$ 中,斜齿圆柱齿轮 1 的名义齿面数学模型为

$$r_{0,i}^{(1)}(\mu_i^{(1)}, \lambda_i^{(1)}) =$$

$$\begin{cases} x_{0,i}^{(1)} = r^{(1)}\lambda_i^{(1)}/\tan\beta^{(1)} \\ y_{0,i}^{(1)} = r_b^{(1)}[\cos\lambda_i^{(1)}(\sin\mu_i^{(1)} - \mu_i^{(1)}\cos\mu_i^{(1)}) + \sin\lambda_i^{(1)}(\cos\mu_i^{(1)} + \mu_i^{(1)}\sin\mu_i^{(1)})] \\ z_{0,i}^{(1)} = r_b^{(1)}[\cos\mu_i^{(1)}(\cos\mu_i^{(1)} + \mu_i^{(1)}\sin\mu_i^{(1)}) - \sin\lambda_i^{(1)}(\sin\mu_i^{(1)} - \mu_i^{(1)}\cos\mu_i^{(1)})] \end{cases} \quad (9)$$

式中: $r^{(1)}$ 、 $r_b^{(1)}$ 分别为齿轮的分度圆半径和基圆半径; $\beta^{(1)}$ 为齿轮螺旋角; $\lambda_i^{(1)}$ 为螺旋线参数; $\mu_i^{(1)}$ 为齿轮 1 第 i 个齿渐开线上任一点的滚动角。

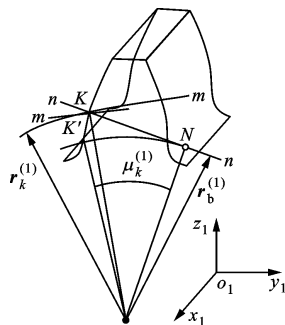


图 5 斜齿圆柱齿轮 1 的名义齿面形成原理

该齿面任一点的单位法矢

$$n_{0,i}^{(1)} = \frac{\partial r_{0,i}^{(1)}}{\partial \lambda_i^{(1)}} \times \frac{\partial r_{0,i}^{(1)}}{\partial \mu_i^{(1)}} \cdot \left(\left\| \frac{\partial r_{0,i}^{(1)}}{\partial \lambda_i^{(1)}} \times \frac{\partial r_{0,i}^{(1)}}{\partial \mu_i^{(1)}} \right\| \right)^{-1} \quad (10)$$

当齿轮安装在轴上且轴线存在误差的情况下,某个时间齿面上任意一点 p 将通过一个小位移旋量运动转换到新的位置点 p' ,如图 6 所示。

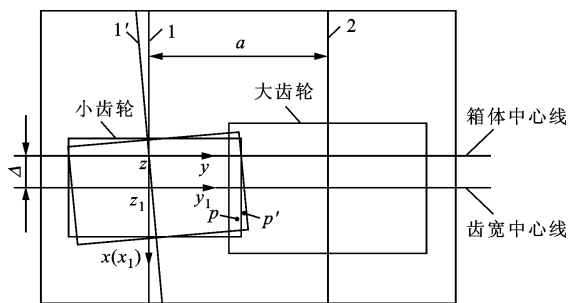


图 6 齿面转换示意图

图 6 中, Δ 为齿宽中心线到箱体中心线的距离,即齿轮坐标系 $o_1-x_1y_1z_1$ 与轴线坐标系 $\sigma-xyz$ 的距离。 p' 的坐标可以表示为

$$r_{1,i}^{(1)}(\mu_i^{(1)}, \phi^{(1)}, \lambda_i^{(1)}) = \mathbf{TOM}(\phi^{(1)})r_{0,i}^{(1)}(\mu_i^{(1)}, \lambda_i^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y & 0 \\ \theta_z & 1 & 0 & d_y \\ -\theta_y & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1

0

0

0

0

$\cos\phi^{(1)}$

$-\sin\phi^{(1)}$

0

0

$\sin\phi^{(1)}$

$\cos\phi^{(1)}$

0

0

0

0

1

$\begin{bmatrix} x_{0,i}^{(1)} \\ y_{0,i}^{(1)} \\ z_{0,i}^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix}$

(11)

式中: $\phi^{(1)}$ 为齿轮 1 的转角; $\mathbf{M}(\phi^{(1)})$ 为转角矩阵; $\mathbf{O}$ 为齿轮坐标系 $o_1-x_1y_1z_1$ 到轴线坐标系 $\sigma-xyz$ 的位置转换矩阵; $\mathbf{T}$ 为 SDT 矩阵。

3.2 传动接触数学模型构建

如图 7 所示,在啮合过程中,齿轮 1、2 的啮合条件为:两齿面连续相切接触,并存在公共接触点 M ,且公共接触点处都有公法线。该啮合条件的数学表达式为

$$\mathbf{r}_{1,i}^{(1)}(\mu_i^{(1)},\lambda_i^{(1)},\phi^{(1)})-\mathbf{r}_{1,j}^{(2)}(\mu_j^{(2)},\lambda_j^{(2)},\phi^{(2)})=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{n}_{1,i}^{(1)}(\mu_i^{(1)},\lambda_i^{(1)},\phi^{(1)})-\mathbf{n}_{1,j}^{(2)}(\mu_j^{(2)},\lambda_j^{(2)},\phi^{(2)})=\mathbf{0}$$

(12)

式中

$$\mathbf{n}_{1,i}^{(1)}=\frac{\partial \mathbf{r}_{1,i}^{(1)}}{\partial \lambda_i^{(1)}}\times\frac{\partial \mathbf{r}_{1,i}^{(1)}}{\partial \mu_i^{(1)}}\cdot\left(\left\|\frac{\partial \mathbf{r}_{1,i}^{(1)}}{\partial \lambda_i^{(1)}}\times\frac{\partial \mathbf{r}_{1,i}^{(1)}}{\partial \mu_i^{(1)}}\right\|\right)^{-1}$$

$$\mathbf{n}_{1,i}^{(2)}=\frac{\partial \mathbf{r}_{1,j}^{(2)}}{\partial \lambda_j^{(2)}}\times\frac{\partial \mathbf{r}_{1,j}^{(2)}}{\partial \mu_j^{(2)}}\cdot\left(\left\|\frac{\partial \mathbf{r}_{1,j}^{(2)}}{\partial \lambda_j^{(2)}}\times\frac{\partial \mathbf{r}_{1,j}^{(2)}}{\partial \mu_j^{(2)}}\right\|\right)^{-1}$$

为单位法矢。

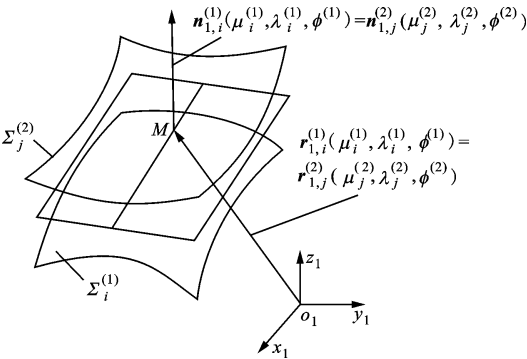


图 7 齿轮啮合关系

式(12)存在 6 个未知量—— $\mu^{(1)}$ 、 $\lambda^{(1)}$ 、 $\phi^{(1)}$ 、 $\mu^{(2)}$ 、 $\lambda^{(2)}$ 和 $\phi^{(2)}$ 。当齿轮 1 的转角 $\phi^{(1)}$ 已知时,方程组变为 5 个未知量的非线性方程组;当不考虑齿向修形时,齿轮为线接触,该方程组则只包括 $\mu^{(1)}$ 、 $\mu^{(2)}$ 和 $\phi^{(2)}$ 3 个未知量。

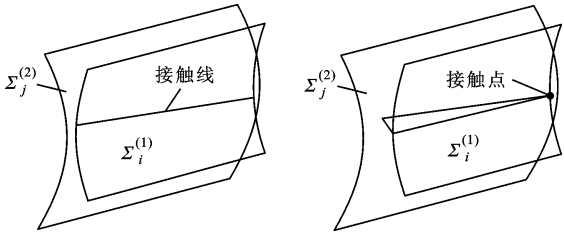
如果两齿轮存在安装公差,齿轮传动的两齿面将由线接触变成边缘接触^[18],如图 8 所示。此时,式(12)则不再适用,为了求解线与面的接触点,方程组变为

$$\mathbf{r}_{1,i}^{(1)}(\mu_i^{(1)},\lambda_i^{(1)},\phi^{(1)})-\mathbf{r}_{1,j}^{(2)}(\mu_j^{(2)},\lambda_j^{(2)},\phi^{(2)})=\mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{1,i}^{(1)}(\mu_i^{(1)},\lambda_i^{(1)},\phi^{(1)})}{\partial \phi_i^{(1)}}\cdot\mathbf{n}_{1,j}^{(2)}(\mu_j^{(2)},\lambda_j^{(2)},\phi^{(2)})=0$$

(13)

若齿轮 1 的转角 $\phi^{(1)}$ 已知,该方程组变为一个含 4 个方程、4 个未知量的非线性方程组。



(a)线接触 (b)边缘接触

图 8 齿面接触情况

通过编程求解式(12)或(13),即能获得输出转角 $\phi^{(2)}$ 的具体数值,再将其代入传动误差计算公式(14)^[19],就可以获得传动误差的具体数值

$$\epsilon=(\phi^{(2)}-\phi_0^{(2)})-(\phi^{(1)}-\phi_0^{(1)})\frac{z^{(1)}}{z^{(2)}}\quad(14)$$

式中: ϵ 为传动误差; $\phi_0^{(1)}$ 、 $\phi_0^{(2)}$ 为齿轮 1、2 的初始转角; $z^{(1)}$ 、 $z^{(2)}$ 为齿轮 1、2 的齿数。

3.3 变动要素对传动误差的影响

基于上节所述的齿面接触分析方法,通过编制相应的程序即可分析啮合过程中不同变动要素对传动误差的影响。下面以表 1 所列参数的 2 个齿轮为例进行分析。

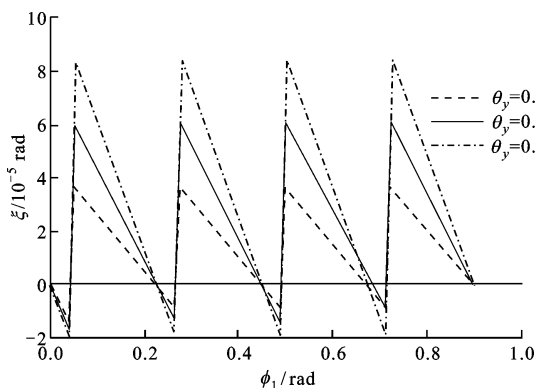
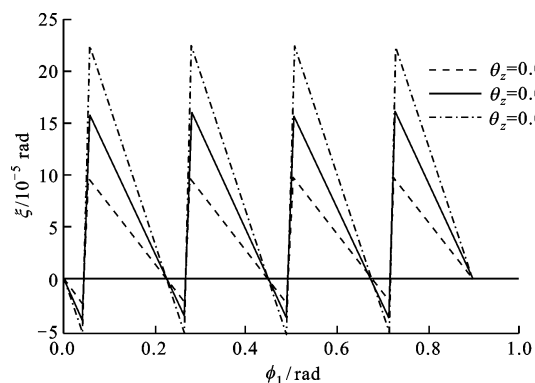
表 1 齿轮基本参数数值表

参数	小齿轮	大齿轮
法向模数/mm	3.175	3.175
齿数	28	35
压力角/(°)	20	20
螺旋角/(°)	15	15
齿顶圆半径/mm	98.61	121.62
齿根圆半径/mm	83.82	106.83
齿宽/mm	15	20
轴承间距/mm	100	100

通过仿真分析发现,在齿轮副正常啮合状态下,齿宽、箱体中心线距离 Δ 的大小对传动误差没有影响,因此为研究方便,在这里设 Δ 为 0,后面仅讨论变动要素对传动误差的影响。

图 9 和图 10 所示为 θ_y 和 θ_z 分别取 0.003、0.005 和 0.007 时传动误差的变化情况。从图中可以看出,当存在轴倾角时,传动误差呈现锯齿状,并随着 θ_y 和 θ_z 的增大而相应减小,并且 θ_z 对传动误差的影响要比 θ_y 的影响大。

d_y 和 d_z 分别取 0.003、0.005 和 0.007,分析传动误差的变化情况,结果发现随着 d_y 和 d_z 的增大,

图9 变动要素 θ_y 对传动误差的影响图10 变动要素 θ_z 对传动误差的影响

传动误差没有变化。这一现象与齿轮中心距可分的性质^[20]相吻合。

图11所示为在齿轮啮合过程中,当变动要素 θ_y 、 θ_z 分别取表2所列数值时传动误差的变化情况。从图中可以看出,传动误差是由这2个变动要素引起的传动误差叠加而成的。由于变动要素在公差约束范围内随机变动,因此为了全面有效地分析传动误差的变化情况,必须在公差范围内综合考量不同变动要素对传动误差的影响。

表2 变动要素的取值

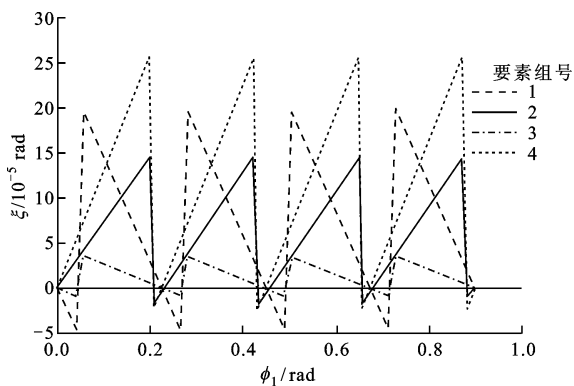
组合序号	θ_y/rad	θ_z/rad
1	0.003	0.005
2	0.003	-0.005
3	-0.005	0.003
4	-0.005	-0.005

注:由于变动要素 d_y 和 d_z 对传动误差没有影响,因此表中仅列出了 θ_y 、 θ_z 的值。

4 传动误差响应面模型的构建

4.1 响应面模型理论

响应面法是一种构建近似模型的方法,通过对

图11 变动要素 θ_y 、 θ_z 对传动误差的综合影响

指定设计空间中的试验点进行试验设计,拟合出一个响应面来模拟真实响应面^[21]。系统响应与设计变量之间的函数关系可以表示为

$$Y = \bar{y}(x) + \delta \quad (15)$$

式中: $\bar{y}(x)$ 是原确定函数 $y(x)$ 的近似函数,即响应面; δ 是总误差。

响应面法的目的是构建近似函数

$$\bar{y} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (16)$$

式中: a_0 、 a_i 、 a_{ii} 和 a_{ij} ($i=1,2,\dots,n$; $j=i,i+1,\dots,n$) 为待定系数。

采用最小二乘法计算待定系数矢量

$$\mathbf{A} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \quad (17)$$

式中: $\mathbf{X}$ 为响应面样本点矩阵,可以表示为

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,N} \\ 1 & x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{M,1} & x_{M,2} & \cdots & x_{M,N} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$\mathbf{Y}$ 是样本点对应的响应矢量,即

$$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_M)^T \quad (19)$$

依据响应面样本点确定 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$,求出待定系数矢量 $\mathbf{A}$,即可确定响应面的具体函数关系式(16)。

4.2 变动要素与传动误差间的响应面函数构建

按照前面的分析,在明确了变动不等式和约束不等式的基础上,通过蒙特卡罗模拟法获取4个变动要素的变动值,再将其代入齿面接触分析程序中,即能得到传动误差的变化情况。但是,此时变动要素与传动误差之间的对应关系尚不清楚,而这也正是进行齿轮公差分析时效率比较低的关键原因。因此,本文依据响应面方法来建立公差约束下变动要素与传动误差之间的响应面函数,具体过程如下。

(1)确定设计变量和设计目标。由于传动误差

是连续变化的,在公差分析中设计者重点关注的是其最值、均值等的分布情况,因此本文选取公差变动要素为设计变量,以传动误差最大值为设计目标。

(2)试验设计。对于设计变量较多的大型空间的采样,工程中常使用拉丁超立方试验设计方法^[22],通过设定拉丁超立方的抽样数量 n ,进行试验就可以获得 n 组公差的变动要素样本值,再以每一组公差样本值作为研究对象,利用齿面接触分析方法求解传动误差,即可得到对应的 n 个设计目标值。

(3)构建响应面模型及模型精度验证。根据步骤(2),利用响应面法构建目标函数的响应面模型。为了检验响应面模型的精度,采用相关系数 R^2 、拟合误差等对响应面模型进行验证^[15]。

构建传动误差响应面模型的流程见图 12。

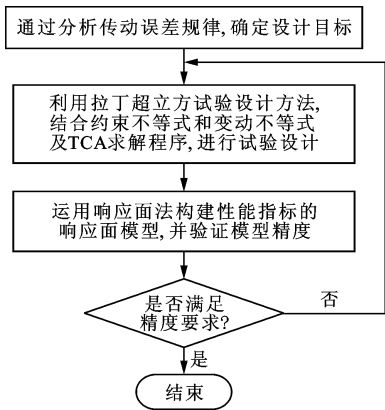


图 12 构建传动误差响应面模型的流程

5 实例分析

已知齿轮参数如表 1 所示,中心距公差 $T_a = 0.09\text{ mm}$,平行度公差 $T_y = 0.08\text{ mm}$, $T_z = 0.05\text{ mm}$,公差内变动要素的变动均服从正态分布。

根据前文的分析,变动要素 d_y 、 d_z 对传动误差没有影响,因此选取变动要素 θ_y 、 θ_z 为设计变量,以传动误差的最大值为设计目标。依据式(5)~式(8),运用蒙特卡罗方法模拟生成 1 000 个变动要素样本,具体分布如图 13 所示。

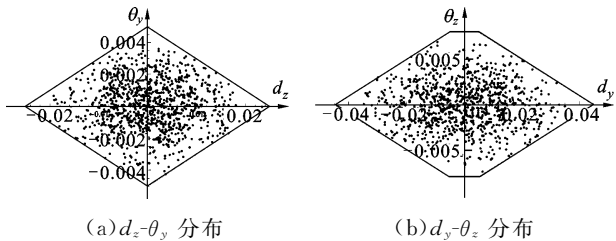


图 13 变动要素分布

采用拉丁超立方试验设计方法获取 200 个样本点,并将其数值代入到齿面接触分析求解程序中,可得到对应的传动误差曲线,图 14 所示为其中的 10 条传动误差曲线。对传动误差数值进行记录 and 统计,即可获得传动误差最大值 $\epsilon_{\max}$ 的数据。为了节约篇幅,表 3 仅列出了其中 5 个样本点的计算结果。

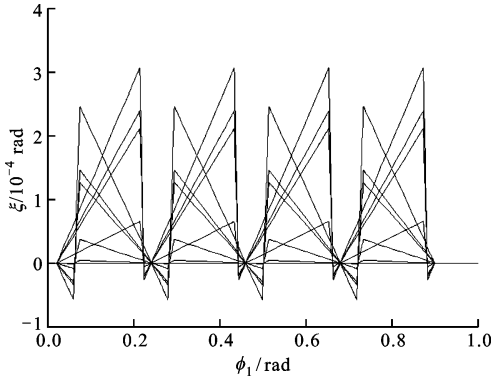


图 14 传动误差曲线

表 3 目标参数的试验设计结果

序号	$\theta_y/10^{-3}\text{ rad}$	$\theta_z/10^{-3}\text{ rad}$	$\epsilon_{\max}/10^{-4}\text{ rad}$
1	-4.670 19	-1.292 25	1.130 09
2	-4.456 82	5.894 61	1.821 93
3	-4.994 85	-2.323 58	1.557 29
4	-3.554 21	-0.045 01	0.512 54
5	1.197 26	-5.330 26	1.806 69

根据试验设计结果,用最小二乘法计算回归系数矩阵,构造的二次多项式响应面函数为

$$\begin{aligned} \epsilon_{\max} = & 5.325\ 33 \times 10^{-5} - 4.268\ 64 \times 10^{-4} \theta_y - \\ & 2.533\ 66 \times 10^{-3} \theta_z + 2.470\ 21 \theta_y \theta_z + \\ & 0.290\ 35 \theta_y^2 + 3.925\ 98 \theta_z^2 \end{aligned} \quad (20)$$

为了保证拟合模型的准确性,用复相关系数 R^2 等参数对传动误差最大值的响应面模型的精度进行检验,结果如下: R^2 为 0.945 0,拟合误差为 2.377×10^{-8} ,残差为 5.402×10^{-10} 。传动误差最大值的

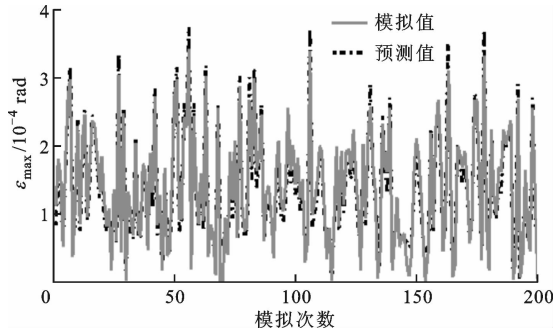


图 15 传动误差最大值的拟合与预测结果对比

拟合与预测结果对比如图 15 所示。从上述分析可知,本文建立的传动误差最大值的响应面模型具有较高的精度,能够较好地满足工程需求。

6 结 语

本文将小位移旋量建模方法和响应面法相结合,应用于齿轮公差分析模型的构建。以齿轮安装公差为例,基于小位移旋量建模理论研究了不同公差变动要素之间的关系,建立了齿轮安装公差的数学模型,并利用响应面法构建了以变动要素为设计变量、以传动误差最大值为设计目标的响应面模型。实例分析结果表明,本文的公差分析模型构建方法具有较高的建模精度和实用性,可以简化公差分析的工作量,提高计算效率,为后期公差分析和综合提供指导。

参考文献:

- [1] 吴昭同, 杨将新. 计算机辅助公差优化设计 [M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1999: 1-7.
- [2] 徐旭松, 杨将新, 曹衍龙, 等. 一种面向可装配性的公差分析方法 [J]. 中国机械工程, 2008, 19(24): 2976-2981.
XU Xusong, YANG Jiangxin, CAO Yanlong, et al. A tolerance analysis method for feasibility of assembly [J]. China Mechanical Engineering, 2008, 19(24): 2976-2981.
- [3] REQUICHA A A G. Toward a theory of geometric tolerancing [J]. International Journal of Robotics Research, 1983, 2(4): 45-60.
- [4] DESROCHERS A, CLÉMENT A. A dimensioning and tolerancing assistance model for CAD/CAM systems [J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 1994, 9(9): 352-361.
- [5] BOURDET P, MATHIEU L, LARTIGUE C, et al. The concept of the small displacement torsor in metrology [G]. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences: 40 Advanced Mathematical Tools in Metrology: II. Singapore: World Scientific, 1996: 110-122.
- [6] ASANTE J N. A small displacement torsor model for tolerance analysis in a workpiece-fixture assembly [J]. Journal of Engineering Manufacture, 2009, 223(8): 1005-1020.
- [7] BARKALLAH M, JABALLI K, LOUATI J, et al. Three-dimensional quantification of the manufacturing defects for tolerances analysis [J]. Multidiscipline Modeling in Materials and Structures, 2012, 8(1): 43-62.
- [8] DAVIDSON J K, MUJEZINOVIC A, SHAH J J. A new mathematical model for geometric tolerances as applied to round faces [J]. Journal of Mechanical Design, 2002, 124(4): 609-622.
- [9] MUJEZINOVIC A, DAVIDSON J K, SHAH J J. A new mathematical model for geometric tolerances as applied to polygonal faces [J]. Journal of Mechanical Design, 2004, 126(3): 504-518.
- [10] 吴玉光. 基于真实机器的装配公差分析方法 [J]. 中国科学: 技术科学, 2014, 44(9): 991-1003.
WU Yuguang. Assembly tolerance analysis method based on the real machine model [J]. Scientia Sinica: Technologica, 2014, 44(9): 991-1003.
- [11] 徐旭松, 杨将新, 曹衍龙, 等. 渐开线圆柱斜齿轮齿面的公差建模 [J]. 浙江大学学报(工学版), 2008, 42(11): 1946-1950.
XU Xusong, YANG Jiangxin, CAO Yanlong, et al. Tolerance modeling of involute helical gear tooth surface [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2008, 42(11): 1946-1950.
- [12] BRUYÈRE J, DANTAN J Y, BIGOT R, et al. Statistical tolerance analysis of bevel gear by tooth contact analysis and Monte Carlo simulation [J]. Mechanism & Machine Theory, 2007, 42(10): 1326-1351.
- [13] 徐旭松. 基于新一代 GPS 的功能公差设计理论与方法研究 [D]. 杭州: 浙江大学, 2008: 26-27.
- [14] 胡洁, 吴昭同, 杨将新. 基于旋量参数的三维公差累积的运动学模型 [J]. 中国机械工程, 2003, 14(2): 127-130.
HU Jie, WU Zhaotong, YANG Jiangxin. Kinematic model of 3D tolerance accumulation based on screw parameter [J]. China Mechanical Engineering, 2003, 14(2): 127-130.
- [15] 吕程, 艾彦迪, 余治民. 蒙特卡罗与响应面法相结合的圆柱度公差模型求解 [J]. 西安交通大学学报, 2014, 48(7): 53-59.
LÜ Cheng, AI Yandi, YU Zhimin. Cylindricity tolerance model solution combining Monte Carlo simulation with response surface method [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2014, 48(7): 53-59.
- [16] 中国国家标准化管理委员会. 圆柱齿轮检验实施规范: GB/Z 18620.3—2008[S]. 北京: 中国标准出版社, 2008.
- [17] LITVIN F L, FUENTES A. Gear geometry and applied theory [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004: 375-403.

(下转第 91 页)